-EXERCICE 26.3-

• ENONCE :

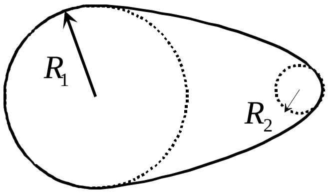
« Cage de Faraday ; pouvoir des pointes »

Remarque : cet exercice concerne le paragraphe VIII du chapitre 26 et s'adresse plus spécifiquement aux MP ; les conséquences pratiques des deux phénomènes étudiés intéresseront les étudiants de toutes les filières.

1) **Conducteur creux**

On considère un conducteur présentant une **cavité**, vide de charges, à l'équilibre électrostatique. Montrer que le potentiel est constant à l'intérieur de la cavité et en déduire une application pratique.

2) **Pouvoir des pointes**



On considère un conducteur à l'équilibre électrostatique, possédant une région "pointue" et une région "arrondie".

La région pointue est assimilable à une sphère de rayon R_2 et la région arrondie à une sphère de rayon $R_1 \gg R_2$. Le conducteur est porté à un potentiel V ; en admettant que les densités surfaciques de charge respectives σ_2 et σ_1 sont comparables à celles de véritables sphères de rayons respectifs R_2 et R_1, évaluer le rapport des champs électrostatiques $\left\|\vec{E}_2\right\|$,au voisinage extérieur de la pointe, et $\left\|\vec{E}_1\right\|$ au voisinage du côté arrondi.

Donner quelques conséquences de ce phénomène.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

• **CORRIGE** :

« Cage de Faraday ; pouvoir des pointes »

1) Le conducteur creux présente donc une surface extérieure et une surface intérieure, qui constitue une **équipotentielle** pour un conducteur à l'équilibre (paragraphe VIII.1.2 du chapitre 26).

Dans la cavité vide de charges, la fonction potentiel $V(x,y,z)$, **continue**, prend ainsi une valeur constante sur la surface intérieure : si V n'était pas constant dans **toute la cavité**, alors V admettrait au moins un extremum (théorème de Rolle), ce qui contredit le fait que le potentiel ne peut avoir d'extremum « en dehors des charges ».

Eclaircissons cette dernière affirmation: considérons un point où, par exemple, le potentiel est maximum ; **toutes** les lignes de champ électrique fuient ce point $\Rightarrow$ si l'on applique le théorème de Gauss à une sphère, centrée sur le point étudié, dont le rayon tend vers zéro, on trouve :

$\vec{E}\cdot d\vec{S} = \dfrac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \succ 0$ $\Rightarrow$ au point considéré, il existe une charge **strictement positive** (pour un minimum, **toutes** les lignes de champ convergent vers le point, le flux est donc strictement négatif pour toute sphère aussi petite soit-elle $\Rightarrow$ au point considéré, il existe une charge négative).

En conclusion, **le potentiel est constant à l'intérieur d'une cavité vide de charges** .

Application : à l'intérieur d'un conducteur métallique, le potentiel est constant $\Rightarrow$ le champ électrique y est **nul**, ainsi que les forces électriques ; on y est donc à « l'abri » d'une décharge éventuelle (coup de foudre, par exemple). On parle de « cage de Faraday » : il est à remarquer que la condition de « fermeture » de la cage n'est pas très stricte, et que le potentiel reste « assez » constant à l'intérieur d'une voiture (suffisamment pour que le champ y soit sensiblement nul).

2) En assimilant les 2 régions considérées à des portions de sphères seules dans l'espace , et en notant Q_1 et Q_2 les charges respectives de la sphère de rayon R_1 (arrondie) et de la sphère de rayon R_2 (pointue), il vient : $V = \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = \dfrac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$

(après application du théorème de Gauss, de $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V = -\dfrac{dV}{dr}\vec{e}_r$, et en se plaçant à la surface, c'est-à-dire en $r = R_1$ ou $r = R_2$).

On peut alors exprimer les densités surfaciques de charge :

$\sigma_1 = \dfrac{Q_1}{4\pi R_1^2} = \dfrac{\varepsilon_0 V}{R_1}$ et $\sigma_2 = \dfrac{Q_2}{4\pi R_2^2} = \dfrac{\varepsilon_0 V}{R_2}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1} = \dfrac{R_1}{R_2}$; or, à la surface d'un conducteur, le théorème de Coulomb donne : $\vec{E} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\dfrac{\|\vec{E}_2\|}{\|\vec{E}_1\|} = \dfrac{\sigma_2}{\sigma_1} = \dfrac{R_1}{R_2} \gg 1}$

Conséquences :

a) c'est donc au voisinage d'un objet pointu (exemple du **paratonnerre**) que le champ électrique sera le plus intense : c'est là que l'air a le plus de chances de s'ioniser, donc de

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

devenir conducteur, donc de permettre aux charges accumulées dans les nuages de s'écouler (coup de foudre).

b) Dans les machines électrostatiques destinées à accumuler des charges par frottement puis à réaliser des décharges électriques, les pièces métalliques devront être **arrondies** pour éviter justement cette ionisation de l'air ambiant, provoquant de mini-décharges prématurées, donc des pertes de charges.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.